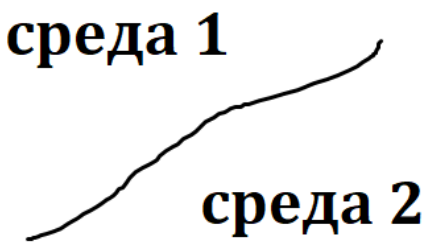
1.6. Постановка задачи (основные уравнения и г.у.) для э/с кусочно-однородной среды.

От формулировки так и тянет ММФ. И не случайно. Э/с – это электростатика, а где электростатика, там уравнение Пуассона:

$$\Delta\varphi(\vec{r}) = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho(\vec{r})$$

Оно верно внутри каждой из сред:

$$\Delta\varphi^{1,2}(\vec{r}) = -\frac{4\pi}{\varepsilon_{1,2}}\rho_{1,2}(\vec{r})$$



Но не на границе. На границе действуют ГУ:

$$\varphi^{I} = \varphi^{II}\big|_{\Gamma},$$

$$\varepsilon_2\frac{\partial\varphi^{II}}{\partial n} - \varepsilon_1\frac{\partial\varphi^{I}}{\partial n}\bigg|_{\Gamma} = 4\pi\rho_{\text{пов}}.$$

Система из полученных нами уравнений

$$\begin{cases} \Delta\varphi^{1,2}(\vec{r}) = -\dfrac{4\pi}{\varepsilon_{1,2}}\rho_{1,2}(\vec{r}) \\ \varphi^{1} = \varphi^{2}\big|_{\Gamma} \\ \varepsilon_2\dfrac{\partial\varphi^{2}}{\partial n} - \varepsilon_1\dfrac{\partial\varphi^{1}}{\partial n}\bigg|_{\Gamma} = 4\pi\rho_{пов} \end{cases}$$

Как сказал бы Боголюбов, и ставит краевую задачу.

Замечание: мы рассмотрели общий случай диэлектрик-диэлектрик. Если же будет диэлектрик-проводник, то внутри проводника зарядов нет и Δφ внутри него будет константой

$$\begin{cases} \Delta\varphi^1(\vec{r}) = -\dfrac{4\pi}{\varepsilon_1}\rho_1(\vec{r}) & \text{среда 1 диэлектрик, здесь всё так же} \\ \varphi^2 = const & \text{а вот среда 2 проводник} \\ \varphi^1 = \varphi^2\big|_\Gamma = const, \quad \rho_{пов} = -\dfrac{\varepsilon_1}{4\pi}\dfrac{\partial\varphi^1}{\partial n}\Big|_\Gamma & \text{- ГУ} \end{cases}$$

1.7. Силы в э/с диэлектриков.

Формула, которую вы все видели:

$$\vec{f} = \rho\vec{E} - \frac{\vec{E}^2}{8\pi}\vec{\nabla}\varepsilon + \vec{\nabla}\left(\frac{\vec{E}^2}{8\pi}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\tau\right)$$

Вывод её у Соколова занимает 4 страницы. Не обманывайте себя, вы это не запомните ☺

1.8. Энергия системы проводников. Силы в э/с проводников.

Начнём с силы. Там формула, которая так же была у вас на семинарах:

$$\vec{F} = \oint_S \frac{\varepsilon\vec{E}^2}{8\pi}\vec{n}dS$$

Интересней с энергией.

Пусть у нас есть N проводников, каждый со своим зарядом:

Как нам подсчитать суммарную энергию системы? Есть несколько формул. Начнём с самой простой:

$$\varepsilon_{es} = \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{N} \varphi_a q_a$$

На вряд ли вас удивит эта формула: аналогия со школьной формулой W=Uq/2 для конденсатора очевидна. Проверим, что W=Uq/2 для конденсатора является частным случаем:

$$\varphi_1 = -\frac{U}{2}, \varphi_2 = \frac{U}{2}$$

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} q_i\varphi_i = \frac{1}{2}\left((-q) * \left(-\frac{U}{2}\right) + q * \frac{U}{2}\right) = \frac{qU}{2}$$

Работает!

Но недостаток этой формулы тот, что она требует знания и зарядов, и потенциалов каждого шара. Впрочем, если мы знаем все заряды, то можем найти все потенциалы:

$$\varphi_a = \sum_{b=1}^{N} S_{ab} q_b$$

А если знаем все потенциалы, можем найти все заряды:

$$q_a = \sum_{b=1}^{N} C_{ab}\varphi_b$$

S_{ab} – т.н. потенциальные коэфы, C_{ab} – ёмкостные коэфы, они же коэфы взаимной ёмкости. У S_{ab} есть простой физический смысл: это «влияние» заряда на b-том проводнике на возникновении потенциала на a-том проводнике. В частности, если все проводники, кроме b-того, не заряжен, то S_{ab} есть коэф прямой пропорциональности между зарядом на b-том проводнике и ёмкости на a-том.

Если это подставить в формулу для энергии

$$\varepsilon_{es} = \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{N} \varphi_a q_a$$

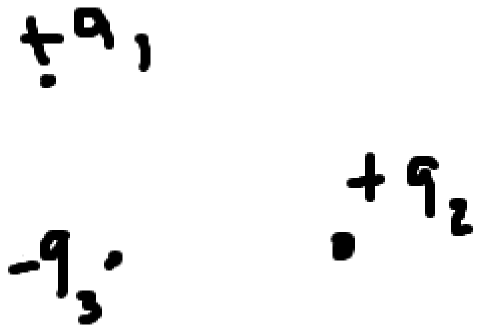
то можно получить ещё две:

$$\varepsilon_{es} = \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{N}\sum_{b=1}^{N} S_{ab} q_a q_b = \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{N}\sum_{b=1}^{N} C_{ab}\varphi_a\varphi_b$$

Первая – $q^2/(2C)$ «на максималках», вторая – $CU^2/2$ «на максималках».

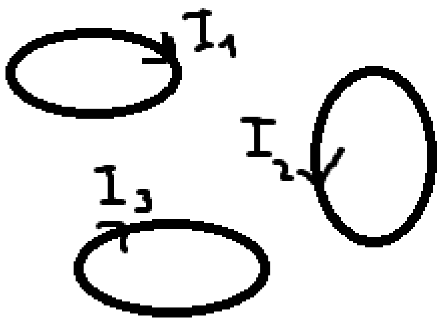
1.9. Постановка задачи (уравнения и граничные условия) для стационарных токов в кусочно-однородных проводниках

Сперва нужно понять, что такое магнитостатика.



Вот заряды. Они никуда не движутся. Они создают электрическое поле, а магнитного нет вовсе. Это электростатика.

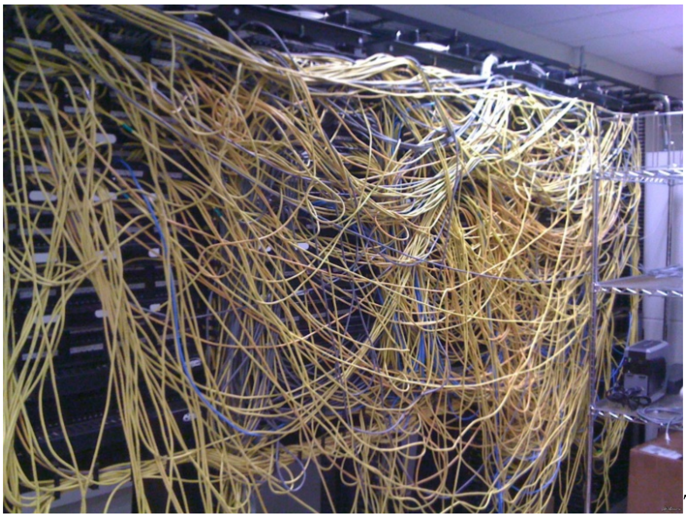
Вот токи



они спокойно себе бегут, не меняясь со временем, создавая ***постоянное*** магнитное поле. Это магнитостатика.

Следствие 1. Если вдруг есть переменный ток – это уже не магнитостатика, потому что токи меняются с течением времени.

Следствие 2: если здесь все токи постоянные, а не переменные

то это тоже магнитостатика. Но если эти провода начнёт дёргать алкаш Василий (не будем его изображать), то это также не будет магнитостатика.

Уравнения Максвелла-Лоренца в магнитостатике:

$$
\begin{cases}
\operatorname{rot} \vec{H}(\vec{r}) = \dfrac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r}), \\
\operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}) = 0, \\
\operatorname{div} \vec{D}(\vec{r}) = 4\pi\rho(\vec{r}), \\
\operatorname{div} \vec{B}(\vec{r}) = 0.
\end{cases}
$$

получаются выкидыванием из уравнений Максвелла-Лоренца

$$
\begin{cases}
\operatorname{rot} \vec{H} = \dfrac{4\pi}{c}\vec{j} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \\
\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho, \\
\operatorname{rot} \vec{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\
\operatorname{div} \vec{B} = 0.
\end{cases}
$$

всех производных по времени.

Один из способов решения – через векторный потенциал **A**. Получим уравнение для него:

$$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}(\vec{r}),\ \ \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}\ \ \Rightarrow\ \ \vec{H} = \frac{\operatorname{rot}\vec{A}}{\mu},\ \ \mu = const.$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c}\mu\vec{j}(\vec{r}),\ \ \Rightarrow\ \ \vec{\nabla}\operatorname{div}\vec{A} - \Delta\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\mu\vec{j}(\vec{r}).$$

Учтем калибровочное условие Лоренца:

$$\operatorname{div}\vec{A}(\vec{r}) + \frac{4\pi}{c}\underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial t}}_{0} = 0\ \ \Rightarrow\ \ \operatorname{div}\vec{A}(\vec{r}) = 0.$$

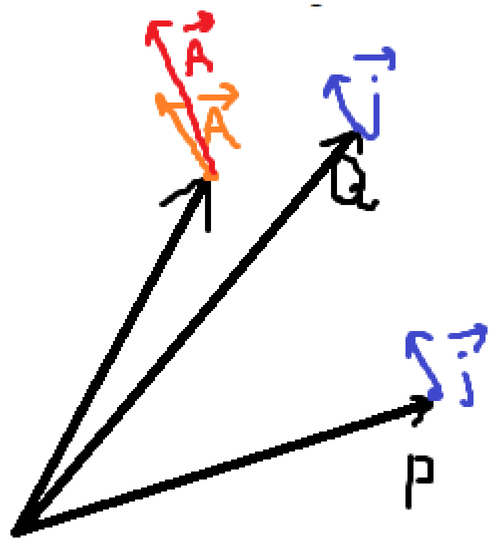
С учетом калибровочного условия Лоренца, уравнение для векторного потенциала примет вид:

$$\Delta\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\mu\vec{j}(\vec{r}).$$

Решение для векторного потенциала имеет вид:

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{\mu}{c}\int dV'\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}.$$

Напомним физический смысл решения. Ток **j** в точке $\vec{r}\,'$ вызывает векторный потенциал в точке $\vec{r}$, причём обратно пропорциональный расстоянию между точками: $|\vec{r}-\vec{r}\,'|$



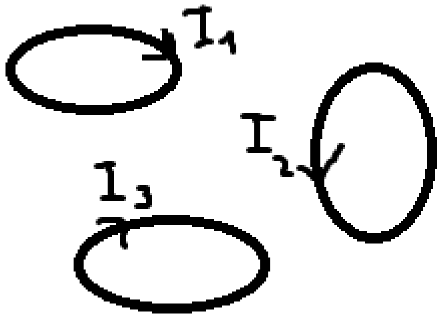
На рисунке ток в точке Q создал больший векторный потенциал, чем ток в точке P, т.к. расположен ближе к точке наблюдения.

Аналогия с $\varphi = \int\frac{\rho}{r}dV$ просто очевидная.

1.10. Энергия м/п стационарных токов. Магнитный поток. Коэффициенты самоиндукции и взаимной индукции.

Вопрос, аналогичный 8-му.

У нас система токов:



Введём понятие магнитного потока. Сравните:

$$\varphi_b = \sum_{b=1}^{N} \frac{1}{C_{ab}} q_a$$

$$\Phi_a = \frac{1}{c} \sum_{b=1}^{N} L_{ab} I_b$$

Для энергии у нас вновь три формулы:

Самая простая:

$$\varepsilon_{ms} = \frac{1}{2c} \sum_{a=1}^{N} \Phi_a I_a$$

Но для неё нужно знать и токи, и потоки. К счастью, они друг через друга выражаются:

$$\Phi_a = \frac{1}{c} \sum_{b=1}^{N} L_{ab} I_b$$

L_{ab} – коэфы взаимной индукции (см. также Электрод26б).

Подставим, получим альтернативную формулу для энергии системы:

$$\varepsilon_{ms} = \frac{1}{2c^2} \sum_{a=1}^{N} \sum_{b=1}^{N} L_{ab} I_a I_b.$$

Мы также могли бы выразить токи через Фшки, а затем получить формул-аналог $W=\Phi^2/(2L)$:

$$\frac{1}{2}\sum_{a,b} Z_{ab}\,\Phi_a\Phi_b$$

Где Z_{ab} – обратная матрица к L_{ab}. Названия у них нет, будем её называть обратными взаимными индуктивностями.

Давайте сделаем табличку к вопросам 8 и 10, чтобы вы могли сравнить формулы:

	Электростатика	Магнитостатика
Источник тока	q	**I**/c
Плотность источника тока	ρ	**j**/c
Формулы для потенциала:		
Потенциал на расстоянии **r** от точечного источника	$\varphi = \frac{q}{r}$	$\boldsymbol{A} = \frac{\frac{\boldsymbol{I}}{c}}{r}$
Потенциал на расстоянии **r** от системы распределённых источников	$\varphi = \int \frac{\rho}{r} dV$	$\boldsymbol{A} = \int \frac{\boldsymbol{j}/c}{r} dV$
Формулы для энергии распределённых источников		
Энергия распределённых источников	$W = \frac{1}{2}\int \rho\varphi dV$ (ср. $\frac{\varphi q}{2}$)	$W = \frac{1}{2}\int (\frac{\boldsymbol{j}}{c}\boldsymbol{A})\, dV$
Формулы для одного проводника или кольца с током		
Энергия через токи и индуктивность ⇔ определение индуктивности	-	$\frac{L\left(\frac{I}{c}\right)^2}{2}$
Определение магнитного потока для одного источника, когда ***он один***	-	$\Phi = L * \frac{I}{c}$
Энергия через потенциал и заряд / поток и ток	$\frac{\varphi q}{2}$	$\frac{\Phi * \frac{I}{c}}{2}$
Энергия через поток и индуктивность	-	$\frac{L^2}{2\Phi}$
Формулы для системы проводников и колец с током		
Определение магнитного потока для a-того источника, когда ***он часть системы***	-	$\Phi_a = \sum_b L_{ab}\left(\frac{I_b}{c}\right)$
Энергия через заряд и потенциал / поток и ток	$\frac{1}{2}\sum_a \varphi_a q_a$ (ср. $\frac{\varphi q}{2}$)	$\frac{1}{2}\sum_i \Phi_i\left(\frac{I_i}{c}\right)$ (ср. $\frac{\Phi * \frac{I}{c}}{2}$)
Энергия через заряды и потенциальные коэфы / взаимные индуктивности и токи ⇔ определение взаимной индуктивности	$\frac{1}{2}\sum_{a,b} S_{ab}\,q_a q_b$	$\frac{1}{2}\sum_{i,j} L_{12}\left(\frac{I_1}{c}\right)(\frac{I_2}{c})$

Энергия через заряды и ёмкости / потоки и обратные взаимные индуктивности	$\frac{1}{2}\sum_{a,b} C_{ab}\varphi_a\varphi_b$	$\frac{1}{2}\sum_{a,b} Z_{ab}\Phi_a\Phi_b$

Упражнение читателю – полюбоваться на таблицу, затем потренироваться в её заполнении ☺ «ср.» - это «сравни».

Прочерки в электростатике связаны с отсутствием аналога индуктивности L кольца в электростатике (точнее говоря, аналог можно будет ввести, но он бесполезен… поэтому Соколов его даже не вводит).